Versuch M1: Feder- und Torsionsschwingungen

Aufgaben:

Federschwingungen:

1. Bestimmen Sie durch Messung der Dehnung in Abhängigkeit von der Belastung die Richtgröße *D* (Federkonstante *k*) von zwei Schraubenfedern.
2. Im Vergleich zum ersten Versuchsteil ist die Richtgröße *D* der zwei Schraubenfedern durch Messung der Schwingungsdauer *T* unter Verwendung verschiedener Zusatzmassen zu bestimmen.

Torsionsschwingungen:

3. Ermitteln Sie das Torsionsmodul *G* von verschiedenen Drillstäben durch Messung der Schwingungsdauer *T* der Torsionsschwingungen.

Grundlagen:

- HOOKEsches Gesetz
- Mechanische Federschwingungen:
  - Schwingungsdauer, Federkonstante, Richtgröße
  - Ungedämpfte, gedämpfte Schwingung
  - Logarithmisches Dekrement, Dämpfungsfaktor
- Torsion, Torsionsmodul, Torsionsschwingung, Direktionsmoment, Drehmoment, Trägheitsmoment, Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung,
- Formulierung und Aussage des Satzes von STEINER

Lineare Federschwingung:

Innerhalb der Elastizitätsgrenzen der Feder führt ein an der Feder angehängter Körper mit der Masse *m* harmonische Schwingungen aus. Die Auslenkung oder Elongation der Feder *y* aus ihrem Ruhepunkt lässt sich als Funktion der Zeit durch eine Sinusfunktion beschreiben:

$$y(t) = y_{\max} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad \text{mit } \omega = 2\pi f = 2\pi / T \ .$$

Dabei ist die rücktreibende Federkraft der Auslenkung proportional und dieser entgegengesetzt:

$$\boxed{F_r = -D \cdot y} \ .$$

Legt man den Beginn der Zeitmessung in den Nulldurchgang der Auslenkung der Schwingung, ist $\varphi_0 = 0$ und

$$\boxed{y(t) = y_{\max} \sin(\omega \cdot t)} \ .$$

Der Proportionalitätsfaktor *D* heißt Richtgröße (häufig auch als Federkonstante *k* bezeichnet). Die rücktreibende Kraft F_r bewirkt eine Beschleunigung des Massekörpers der Masse *m*, womit für die Newtonsche Bewegungsgleichung folgt:

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F_r = -D \cdot y} .$$

Die sinusförmige Abhängigkeit der Auslenkung von der Zeit erfüllt genau dann die Newtonsche Bewegungsgleichung, wenn die Kreisfrequenz eindeutig durch die schwingende Masse und die Richtgröße der Feder bestimmt wird:

$$\boxed{\omega = 2\pi / T = \sqrt{\frac{D}{m}}} \ .$$

Torsionsschwingung:

Das Torsionsmodul G (identisch mit dem Schubmodul) eines Stoffes lässt sich leicht aus Untersuchungen an verdrillten Stäben mit kreisförmigen Querschnitt ermitteln. Um einen Stab (oder Draht) der Länge l und mit dem Radius r um den Winkel φ zu verdrillen, ist ein Gesamtdrehmoment M der Größe

$$\boxed{M = \frac{\pi G r^4}{2l} \cdot \varphi}$$

erforderlich.

Liegt das zu untersuchende Material als Draht vor, ist kein großes Drehmoment zur Verdrillung nötig und es bietet sich eine dynamische Messmethode unter Zuhilfenahme der Messung der Schwingungsdauer von Torsionsschwingungen an. Dabei liegt hier das Direktionsmoment D in folgender Form vor:

$$\boxed{D = \frac{\pi G r^4}{2l} = \frac{M}{\varphi}}.$$

Die Bewegungsgleichung des Torsionspendels $J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D \cdot \varphi$ liefert in Analogie zur linearen Federschwingung die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{J/D}$. Das Trägheitsmoment J setzt sich aus mehreren Bestandteilen zusammen: Drillstab, Hebelstange und Zusatzmassen. Macht man zwei Messungen, bei denen sich lediglich das Trägheitsmoment um einen bekannten Betrag unterscheidet, kann man mittels dieser beiden Messungen das Direktionsmoment und damit die Materialgröße, d.h. das Torsionsmodul G bestimmen. (s. Auswertung zu 3.)!

Literatur:

Geschke, Physikalisches Praktikum:
- 2.0 Schwingungen; Allgemeine Grundlagen
- 3.0 Deformationsverhalten; Allgemeine Grundlagen
- 3.1 Elastizitätsmodul
- 3.2 Torsionsmodul

Haupt, Vorlesungsskript:
- 1.7 Mechanik deformierbarer Körper

Recknagel, Physik – Mechanik:
- 2.7 Die harmonische Schwingung
- 3.10 Die Federschwingung
- 9.7 Das Hookesche Gesetz
- 9.8 Drillung

Grimsehl, Lehrbuch der Physik – Band 1:
- 3.1.5 Harmonische Bewegung. Pendel
- 3.3.1 Arbeit. Energie. Energieprinzip.
- 6.1 Dehnung und Pressung
- 6.2 Biegung und Drillung
- 9.1 Allgemeines über Schwingungen

Testfragen:

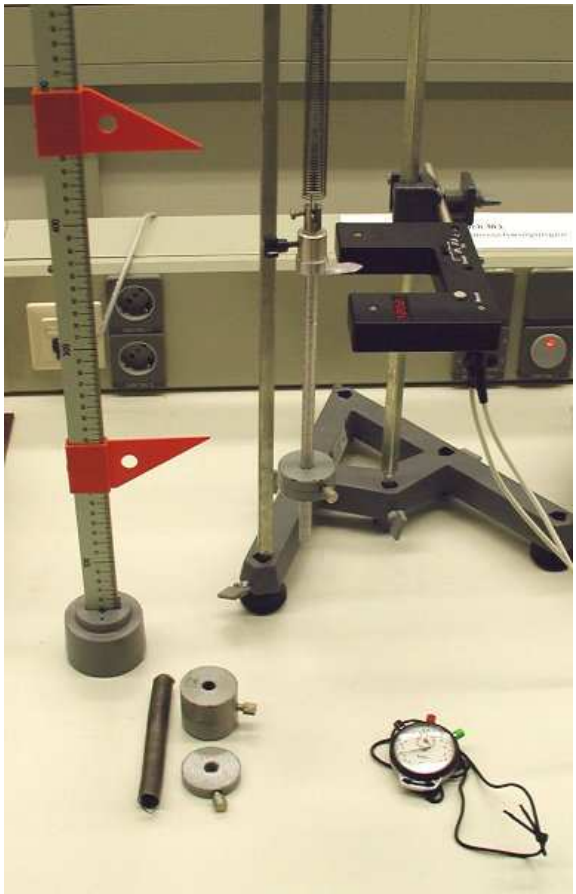
1. Erläutern Sie das HOOKEsche Gesetz für Normalspannung und Schubspannung!
2. Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Richtgröße D, wie sie für den 2. Versuchsteil Verwendung findet, her! (s. „Hinweise zur Auswertung der Messergebnisse“; 2 Messungen mit der gleichen Feder, aber unterschiedlicher Massen)
3. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Federkonstante, träger Masse und Schwingungsdauer bei einer (harmonischen) Federschwingung dar! Welchen Einfluss hat eine Änderung der Amplitude bzw. der Stärke der Dämpfung auf die Schwingungsdauer einer Schwingung, wenn die anderen Parameter jeweils konstant gehalten werden?
4. Erläutern Sie den Zusammenhang der beteiligten Energieformen (kinetische, potentielle Energie) während des Schwingungsvorgangs! An welchen Punkten liegt nur kinetische oder nur potentielle Energie vor?

Hinweise zur experimentellen Durchführung:

Machen Sie sich zu Beginn des Praktikums mit den Bedienungshinweisen zur **Gabellichtschranke** vertraut!

Zu 1:

Messen Sie die **Dehnung *y*** (Auslenkung aus dem unbelasteten Zustand) der beiden, Ihnen zur Verfügung gestellten Federn bei **zunehmender Belastung *F*** ($F = m * g$) durch eine Folge von verschiedenen Zusatzmassen mit Hilfe der Schieber am Maßstab. Verwenden Sie dabei maximal **750 g** (6 Messungen). Kombinieren Sie dabei die Zusatzmassen. Die Beträge der Massen werden durch Wägung bestimmt.

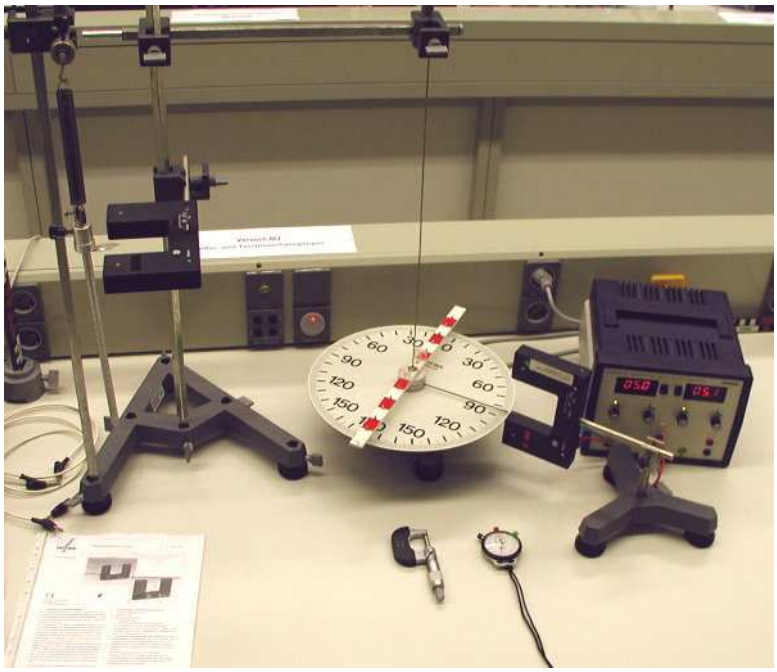


Zu 2:

Für die **Messung der Schwingungsdauer *T*** wird eine **Gabellichtschranke** mit Zähler verwendet. Justieren Sie die Gabellichtschranke so, dass im Ruhezustand der Feder die Lichtschranke durch den angebrachten Zeiger möglichst geschlossen ist. Für die Bestimmung der Periodendauer stoppen sie die Zeitdauer für eine bestimmte Anzahl von Perioden, die Sie durch die Gabellichtschranke im Modus „Impulszählung" zählen lassen. Beachten Sie dabei, dass der Zeiger pro Periode zweimal durch die Lichtschranke geht!
Messen Sie die **Dauer von <u>20 Perioden</u> 5 mal**. Führen Sie diese Messungen mit **2 verschiedene Zusatzmassen** (z.B. 125g und 500g) aus.
Wiederholen Sie die Messungen für die **zweite Feder.**

Zu 3:

Wählen Sie 3 verschiedene Drillstäbe mit **2 verschiedene Materialien**, **2 verschiedenen Radien und 2 verschiedene Längen** aus (→ 3 Messreihen).



Messen Sie zuerst die Radien *r* (Mikrometerschraube) und **wirksamen Längen *l*** (Lineal) **der Drillstäbe**. Messen Sie dazu die Radien an 5 verschiedenen Stellen der Stäbe, um statistische Fehler minimal zu halten.
Die Drillstäbe werden senkrecht montiert, am oberen Ende fest eingespannt und am unteren Ende in die entsprechenden Aussparungen der Hebelstange eingedrückt.
Für die **Messung der Schwingungsdauer *T*** wird wie bei 2. eine **Gabellichtschranke** mit Zähler verwendet. Justieren Sie die Gabellichtschranke so, dass im Ruhezustand des schwingenden Systems der angebrachte Zeiger

die Lichtschranke möglichst schließt. Gehen Sie für die Messung der Periodendauer wie bei 2. vor.
Auf der Hebelstange werden ***symmetrisch*** 2 **gleiche Zusatzmassen** m_1 (Gesamtzusatzmasse: $m_z = 2\ m_1$) im **Abstand** R_1 zur Drehachse aufgesteckt. **Messen** Sie beide **Zusatzmassen**!
Messen Sie die **Dauer von 20 Schwingungen jeweils 5 mal**.
Wiederholen Sie die Messung mit den **gleichen Zusatzmassen** und wählen einen **anderen Abstand** R_2 zur Drehachse.
Wiederholen Sie die Messreihe für die **2 anderen Drillstäbe**.

Hinweise zur Auswertung der Messergebnisse:

Zu 1:
Stellen Sie die Abhängigkeit der **Dehnung** y von der **Belastung** F **grafisch dar.** Ermitteln Sie die **Richtgröße** D beider Federn durch Berechnung des **Anstieges** der entsprechenden **Regressionsgeraden** (z.B. mit EXCEL oder MathCAD). Beachten Sie dabei, dass der o.g. Anstieg gleich $1/D$ ist!

Zu 2:
Berechnen Sie für jede Messreihe (jede Feder und jede Zusatzmasse) den **Mittelwert und die statistische Messunsicherheit** (auf der Basis eines 95%-iges Vertrauensniveaus) **für die Schwingungsdauer** T.
Eliminieren Sie unter Verwendung der Messungen für die beiden Zusatzmassen m_1 und m_2 die Eigenmasse der Feder und der angehängten Einrichtung, um die **Richtgröße** D **beider Federn** zu berechnen:

$$\boxed{D = 4\pi^2 \frac{m_2 - m_1}{T_2^{\,2} - T_1^{\,2}}}.$$

Ermitteln Sie die **Messunsicherheit von** D bei dieser dynamischen Messmethode (Fehlerfortpflanzung von T_i; Ergänzen Sie dazu die statistische Messunsicherheit der Schwingungsdauer T_1 und T_2 noch durch die systematische Messunsicherheit der Stoppuhr; die Messunsicherheit der Massen kann vernachlässigt werden).
Vergleichen Sie die Resultate für D mit denen von 1. Diskutieren Sie die Ursachen möglicher Abweichungen.

Zu 3:
Berechnen Sie die **Mittelwerte** und die **statistischen Messunsicherheiten** (95%-iges Vertrauensniveau) der **Radien** r der Drillstäbe. Schätzen Sie die **systematische Messunsicherheit für** die **Längen** l der Drillstäbe, der **Abstände** R gemäß des Messverfahrens ab.
Berechnen Sie für jede Messreihe (jeder Drillstab und beide Abstände R der Zusatzmassen) den **Mittelwert und die Messunsicherheit** (95%-iges Vertrauensniveau) **für die Schwingungsdauer** T.

Um das **unbekannte Trägheitsmoment** J der Versuchsanordnung bezüglich der Torsionsachse zu **eliminieren**, sind ähnlich wie im Versuch 2 jeweils **2 gleiche Zusatzmassen** m_1 (Gesamtzusatzmasse: $m_z = 2\ m_1$) erforderlich, die auf der Hebelstange in **verschiedenen** Abständen R_1 und R_2 angebracht werden können. Zur Vermeidung einer Unwucht sind beide Zusatzmassen dabei symmetrisch gegenüberliegend platziert worden.
Damit erhöht sich das **Trägheitsmoment** J der Versuchsanordnung für jede Zusatzmasse um 2 Anteile: das Trägheitsmoment des Zusatzkörpers J_z bezüglich seiner eigenen Schwerpunktachse (hier identisch mit dem **Punkt** der Befestigung auf der Hebelstange) sowie dem Produkt aus der Masse des Zusatzkörpers und dem Quadrat des Abstandes der Schwerpunktachse (Befestigungspunkt) und der Drehachse (Torsionsachse): $m_1 R^2$ (für beide dann $m_z R^2$) **(Satz von STEINER!)**. In die Berechnung des Direktionsmomentes und damit des Torsionsmodul geht damit analog zu zweitens wieder nur die Differenz ein: $m_z (R_2^2 - R_1^2)$!
Hat man für beide Messungen die Schwingungsdauer T_1 und T_2 ermittelt, folgt damit für das **Direktionsmoment**:

$$\boxed{D = \frac{4\pi^2 m_z \left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)}{(T_2^{\,2} - T_1^{\,2})}}$$

und damit für das gesuchte **Torsionsmodul**:

$$\boxed{G = \frac{2l}{\pi r^4} \cdot D = \frac{8 l \pi m_z \left(R_2^{\,2} - R_1^{\,2}\right)}{r^4 (T_2^{\,2} - T_1^{\,2})}} \; .$$

Berechnen Sie für **jeden Drillstab** das **Torsionsmodul *G***.
Vergleichen Sie die ermittelten **Torsionsmodule untereinander** (bei gleichen Material, aber verschiedenen Längen bzw. Radien) **sowie mit den Tabellenwerten** (siehe auch Schubmodul z.B. in "Physik - Gleichungen und Tabellen" von MENDE und SIMON). Diskutieren Sie Ursachen der eventuell auftretenden Unterschiede!
Führen sie exemplarisch anhand **eines** Drillstabes die **Fehleranalyse** für *G* analog zu 2. mit Hilfe der **Fehlerfortpflanzung** durch (z.B. mit MathCAD).

Versuchszubehör:

- Gabellichtschranke mit Zähler, Verbindungsleitungen
- Maßstab (120 cm), 2 Schieber für Maßstab, Mikrometerschraube
- Netzgerät
- Stoppuhr
- Dreifuß, Stativstange, Doppelmuffen, Universalklemmen
- Satz von Torsionsstäben und Spiralfedern
- Satz von Zusatzmassen
- Waage (an zentraler Stelle im Labor)

Nordhausen, d. 01.03.11